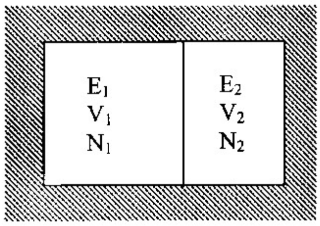
Tentamen Styatistische Fysica **12 april 2010**

Opgave 1



Beschouw en geisoleerd systeem dat in twee compartimenten is verdeeld door een warmtedoorlatende scheidingswand.
De totale energie is $E = E_1 + E_2$.
Het totale volume is $V = V_1+V_2$.
Het totale aantal deeltjes is $N = N_1 + N_2$.
E, V en N hebben een vaste waarde.

a) Geef de twee fundamentele postulaten van de statistische mechanica:
   i) het postulaat van de a priori waarschijnlijkheden
   ii) het evenwichtspostulaat

b) Geef de Boltzmann definitie van entropie

c) Laat zien hoe de postulaten en de entropiedefinitie leiden tot de temperatuurdefintie: $\frac{1}{T_i} = \left[\frac{\partial S_i}{\partial E_i}\right]_{V_i,N_i}$

Opgave 2

Een systeem met N deeltjes heeft een niet ontaarde grondtoestand en een tweevoudig ontaarde aangeslagen toestand met energie Δ. In de aangeslagen toestand hebben de deeltjes een magnetisch moment μ. Het systeem is in contact met een warmtebad met temperatuur T.

a) Laat zien dat het aantal deeltjes n dat zich in de aangeslagen toestand bevindt gegeven wordt door

$$n = \frac{2N}{\left(2 + e^{\Delta/kT}\right)}$$

b) De deeltjes die zich in de aangeslagen toestand bevinden kunnen worden opgevat als een paramagnetisch (sub)systeem.
Laat zien dat de magnetisatie van dit subsysteem in een magnetisch veld B gegeven wordt door:

$$M = \frac{n\mu}{V}\tanh\left(\frac{\mu B}{kT}\right)$$

c) Neem aan dat $\mu B \ll kT$.
In deze situatie heeft de susceptibiliteit $\chi = \frac{\mu_0 M}{B}$ een maximum bij de temperatuur $T = b\Delta/k$. (μ_0 is de permeabiliteit van het vacuüm.)
Geef een numerieke schatting voor b.

Opgave 3
Volgens de quantummechanica hebben de moleculen van een tweeatomig gas rotatie-energieniveaus die gegeven worden door $\varepsilon_r = \frac{\hbar^2}{2I} r(r+1)$ met $r = 0,1,2,....$, waarbij I een constante is en het energienivau ε_r een $(2r + 1)$-voudige ontaarding heeft.

a) Geef de toestandssom voor de rotatie

b) Leid een uitdrukking af voor de warmtecapaciteit in de lage temperatuurbenadering, d.w.z. onder de aanname $kT << \frac{\hbar^2}{2I}$

c) Leid een uitdrukking af voor de warmtecapaciteit in de ~~lage~~ hoge temperatuurbenadering, d.w.z. onder de aanname $kT >> \frac{\hbar^2}{2I}$

Hint voor gedeelte c: De substitutie $y = r(r+1)$ kan van nut zijn.

Opgave 4
De vergelijking van Clausius Clapeyron wordt gegeven door $\frac{dP}{dT} = \frac{\Delta S}{\Delta V}$

a) Beschrijf in woorden wat deze vergelijking voorstelt en wat de gebruikte symbolen betekenen.

b) Geef een afleiding van de vergelijking van Clausius-Clapeyron er van uitgaande dat de vrije energie per deeltje g in de verschillende fases bij fasenevenwicht aan elkaar gelijk moet zijn : $g_1(T,P) = g_2(T,P)$.

c) Het tripelpunt van stikstof (N_2) ligt bij T = 63,18 K en P = 12,53 kPa.
De smeltwarmte van vaste stikstof bij het triplepunt is $\Delta_{fus}H$ = 0,72 kJ/mol.
De verdampingswarmte van vloeibare stikstof bij het triplepunt is:
$\Delta_{vap}H$ = 5,56 kJ/mol.
Bereken de entropieverandering (per mol) bij sublimatie van vaste stikstof bij het tripelpunt.

Opgave 5
N bosonen met spin zijn opgelsoten in een ionenval waarbij ze onderworpen zijn aan een harmonische potentiaal. Deze potentiaal leidt tot een toestandsdichtheid $f(\varepsilon) = C\varepsilon^2$.

a) Laat zien dat de chemische potentiaal voor $T \to 0$ wordt gegveen door $\mu = -\frac{kT}{N}$.

Voor het vervolg nemen we aan dat de chemische potentiaal bij alle temperaturen beneden de kritische temperatuur deze waarde houdt.

b) Laat zien dat het aantal deeltjes geschreven kan worden als

$$N = N_1 + \int_0^\infty \frac{C\varepsilon^2 d\varepsilon}{e^{\beta(\varepsilon-\mu)} - 1}$$

c) Leidt een uitdrukking af voor de kritische temperatuur T_c die optreedt bij Bose-Einstein condensatie in dit systeem.
Laat zien dat de fractie deeltjes die zich in de grondtoestand bevinden geschreven kan worden als

$$\frac{N_1}{N} = 1 - \left(\frac{T}{T_c}\right)^3$$

Physical contants:

Getal van Avogadro: $N_A = 6{,}02 \times 10^{23}\ mol^{-1}$

Constante van Planck: $h = 6{,}626 \times 10^{-34}$ Js

$\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1{,}055 \times 10^{-34}$ Js

Constante van Boltzmann: $k = 1{,}381 \times 10^{-23}\ J\,K^{-1}$

Gasconstante: $R = 8{,}31\ J\ mol^{-1}\ K^{-1}$

Lichtsnelheid: $c = 3 \times 10^{8}\ m\ s^{-1}$

Rustmassa elektron $m_e = 9{,}11 \times 10^{-31}$ kg

Rustmassa proton $m_p = 1{,}67 \times 10^{-27}$ kg

Bohr magneton $\mu_B = 9{,}27 \times 10^{-24}\ A\ m^2$

Integrals:

n	$\int_0^\infty dx\, x^n e^{-ax^2}$ (a > 0)	$\int_0^\infty \frac{x^n dx}{e^x - 1}$	$\int_0^\infty \frac{x^n dx}{e^x + 1}$	$\int_0^\infty \frac{x^n e^x}{(e^x - 1)^2}$	$\int_0^\infty x^n \ln(1 - e^{-x}) dx$
0	$\frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{\pi}{a}\right)}$	diverges	ln 2	diverges	$-\frac{\pi^2}{6}$
1/2	$\frac{0{,}6127}{a^{3/4}}$	$2{,}612\,\frac{\sqrt{\pi}}{2}$	0,6781	diverges	$-1{,}341\,\frac{\sqrt{\pi}}{2}$
1	$\frac{1}{2a}$	$\frac{\pi^2}{6}$	$\frac{\pi^2}{12}$	diverges	-1,202
3/2	$\frac{0{,}4532}{a^{5/4}}$	$1{,}341\,\frac{3\sqrt{\pi}}{4}$	1,153		$-1{,}127\,\frac{3\sqrt{\pi}}{4}$
2	$\frac{1}{4a}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$	2,404	1,803	$\frac{\pi^2}{3}$	$-\frac{\pi^4}{45}$
5/2	$\frac{1{,}662}{a^{7/4}}$	$1{,}127\,\frac{15\sqrt{\pi}}{8}$	3,083		-3,505
3	$\frac{1}{2a^2}$	$\frac{\pi^4}{15}$	$\frac{7\pi^4}{120}$	7,212	-6,221
7/2	$\frac{0{,}5665}{a^{9/4}}$	12,268	11,184		
4	$\frac{3\sqrt{\pi}}{8a^{5/2}}$	24,886	23,331	$\frac{4\pi^4}{15}$	